Lösen von Exponentialgleichungen

Vorwissen

Potenzieren	**Wurzelziehen**	**Logarithmieren**
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$	$\log_2(8) = 3$
Suche nach dem Wert einer Potenz,	Suche nach der Basis,	Suche nach dem Exponenten,
wenn Basis und Exponent gegeben sind	die mit dem Exponenten potenziert werden muss	Mit dem die Basis potenziert werden muss

Beispiel:
$10^2 = 100$

Basis und Exponent bekannt,	Potenzwert 100 bekannt und	Potenzwert 100 bekannt und
Potenzwert gesucht: Lösung: $10^2 = 10 * 10 = 100$	Basis gesucht, die mit 2 potenziert 100 ergibt: Lösung: $\sqrt{100} = 10$	Exponent gesucht, mit dem Basis 10 potenziert werden muss, um 100 zu erhalten: Lösung: $\log_{10}(100) = 2$, da $10^2 = 100$

Definition:
Der Logarithmus zur Basis b einer gegebenen Zahl a ist der Exponent c, mit dem man die Basis b potenzieren muss, um a zu erhalten:

$\log_b(a) = c \quad \Leftrightarrow \quad b^c = a$

d.h. $b^{\log_b(a)} = b^c = a$
d.h. $b^{\log_b}$ heben sich gegenseitig auf

Häufige Logarithmen:
Zehner- oder dekadischer Logarithmus (log oder lg) zur Basis 10
Natürlicher Logarithmus zur Basis e (ln)

Rechenregeln für den Logarithmus:

1. $\log_b(u * v) = \log_b(u) + \log_b(v)$ und $\log_b(u : v) = \log_b(u) - \log_b(v)$,
   d.h. „aus multiplizieren wird addieren“

2. $\log_b(a^n) = n * \log_b(a)$ und $\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} * \log_b(a)$,
   d.h. „ aus potenzieren wird multiplizieren“

2. $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$,
   d.h. mit dem natürlichen Logarithmus zur Basis e (ln) lassen sich die Logarithmen zu allen beliebigen Basen berechnen

Lösen von Exponentialgleichungen

Aufgabe 1:
Lösen Sie die Gleichung: $5^x = 125$
d.h. mit welcher Zahl muss 5 potenziert werden, damit sich 125 ergibt

Lösung:
- Zerlegung in Primfaktoren: $125 = 5 * 25 = 5^3$ oder
- gesucht: $\log_5 (125) = \frac{\ln(125)}{\ln(5)} = \frac{4{,}8283}{1{,}6094} = 3{,}000062135$ oder
- logarithmieren der Gleichung führt zu:
  $\log(5^x) = \log(125)$ / Logarithmenregel („potenzieren wird zu multiplizieren“)
  $\Leftrightarrow x * \log(5) = \log(125)$ / :log(5)
  $\Leftrightarrow x = \frac{\log(125)}{\log(5)} = \frac{2{,}0969}{0{,}699} = 2{,}999856938$

Aufgabe 2:
Lösen Sie die Gleichung: $3^{x-1} = 9$

Lösung:
- argumentativ: $9 = 3^2$, also: $x – 1 = 2$, d.h. $x = 3$
- logarithmieren der Gleichung führt zu:
  $\log(3^{x-1}) = \log(9)$ / Logarithmenregel („potenzieren wird zu multiplizieren“)
  $\Leftrightarrow (x-1) * \log(3) = \log(9)$ / :log(3)
  $\Leftrightarrow x-1 = \log(9) : \log(3)$
  $\Leftrightarrow x-1 = 0{,}9542 : 0{,}4771$
  $\Leftrightarrow x-1 = 2$
  $\Leftrightarrow x = 3$

Aufgabe 3:
Lösen Sie die Gleichung: $0{,}5^x = 2^{x+1}$

Lösung:
- logarithmieren der Gleichung führt zu:
  $\log(0{,}5^x) = \log(2^{x+1})$ / Logarithmenregel („potenzieren wird zu multiplizieren“)
  $\Leftrightarrow x * \log(0{,}5) = (x+1) * \log(2)$ /: log(0,5) /: (x+1)
  $\Leftrightarrow x : (x+1) = \log(2) : \log(0{,}5)$
  $\Leftrightarrow x : (x+1) = 0{,}3010 : (-0{,}3010)$
  $\Leftrightarrow x : (x+1) = -1$ / *(x+1)
  $\Leftrightarrow x = - (x+1)$
  $\Leftrightarrow x + x = -1$
  $\Leftrightarrow x = - 0{,}5$