

Integrationsregeln

Berechnen Sie mit Hilfe des 2. Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung folgende Integrale:

$$1. \int_{-1}^1 x^2 dx$$

$$2. \int_{-1}^1 x^3 dx$$

$$3. \int_{-1}^1 3x^2 dx$$

$$4. \int_{-1}^1 -\frac{1}{4}x^3 dx$$

$$5. \int_{-1}^1 (x^2 + x^3) dx$$

$$6. \int (x^3 + 3x^2) dx$$

$$7. \int (3x^2 - \frac{1}{4}x^3) dx$$

$$8. \int_{-1}^1 x^2 dx$$

$$9. \int_{-1}^{-1} x^3 dx$$

$$10. \int_{-2}^2 x^3 dx$$

$$11. \int_{-2}^2 x^3 dx$$

$$12. \int_{-1}^3 x^2 dx$$

$$13. \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^3 x^2 dx$$

Was fällt Ihnen auf?

Verallgemeinern Sie Ihre Vermutung und beweisen Sie sie.

Integrationsregeln

Summenregel

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Anwendung des 2. Hauptsatzes auf die linke Seite der Gleichung ergibt:

$$[F(x) + G(x)]_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b$$

das entspricht der rechten Seite der Gleichung

Faktorregel

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx \text{ wobei } c \text{ eine reelle Zahl ist}$$

auch hier führt die Anwendung des 2. Hauptsatzes zum Beweis:

$$[cF(x)]_a^b = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) = c[F(x)]_a^b$$

gleiche Grenzen

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Anwendung des 2. Hauptsatzes:

$$[F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

vertauschte Grenzen

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Anwendung des 2. Hauptsatzes:

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = - (F(a) - F(b)) = - [F(x)]_b^a$$

Intervallteilung

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \text{ mit } a < b < c$$

Anwendung des 2. Hauptsatzes auf die rechte Seite ergibt:

$$[F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = [F(x)]_a^c$$

die linke Seite