

## Logarithmusfunktion

Eine Bakteriologin setzt für eine bestimmte Bakterienart Kulturen mit fünf verschiedenartigen Nährböden an. Die Wachstumsbedingungen der Kulturen sind deshalb unterschiedlich.

Nach je einer Stunde ist der Bestand der Kultur I auf das Doppelte, der Kultur II auf das 3-fache, der Kultur III auf das 2,1-fache, der Kultur IV auf das 1,3-fache, der Kultur V auf das 1,5-fache angewachsen.

Der Vermehrungsprozess einer jeden Kultur wird unterbrochen, wenn ihr Bestand das 8-fache des ursprünglichen Bestandes erreicht hat.

Nach wie viel Stunden tritt dies bei den einzelnen Kulturen ein?

.....

Für die erste Kultur gilt die Funktionsgleichung  $f(x) = 2^x$ .

Ein Abbruch ergibt sich nach 3 Stunden. Begründen Sie dies.

.....

Für die Kultur II gilt  $f(x) = 3^x$ .

Ein Abbruch findet zwischen einer und zwei Stunden statt. Begründung?

.....

Die Auflösung der Gleichung  $f(x) = 3^x = y$  nach  $x$  liefert das exakte Ergebnis.

Gesucht ist also die Zahl, mit der man 3 potenzieren muss, um  $y$  zu erhalten.

Sie heißt Logarithmus von  $y$  zur Basis 3 ( $\log_3 y$ ).

Die Funktionsgleichung  $y = \log_3 x$  ist die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion zu  $f$  mit  $f(x) = 3^x$ .

### Aufgaben:

1. Berechnen Sie  $\log_3 1$  und  $\log_3 \frac{1}{9}$ .
2. Berechnen Sie  $8 = 3^x$ .
3. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Umkehrfunktionen der restlichen Kulturen.

Allgemein gilt:

Zu jeder Exponentialfunktion  $y = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^{>0}$  und  $a \neq 1$  lässt sich die Umkehrfunktion folgendermaßen bestimmen:

- |   |   |
|---|---|
| 1. auflösen der Funktionsgleichung nach $x$ | $x = \log_a y$ (Logarithmus von $y$ zur Basis $a$ ) |
| 2. vertauschen von $x$ und $y$              | $y = \log_a x$                                      |

### Definition:

Die Umkehrfunktionen zu den Exponentialfunktionen  $f$  mit  $f(x) = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^{>0}$  und  $a \neq 1$  nennt man **Logarithmusfunktionen**.

Man schreibt  $f(x) = \log_a x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$

Der Logarithmus mit der Basis 10 wird **Zehnerlogarithmus** oder **dekadischer Logarithmus** genannt und  $\lg x$  geschrieben.

Der Logarithmus zur Basis  $e$  (Eulersche Zahl: 2,7182....) heißt **natürlicher Logarithmus** und wird  $\ln x$  geschrieben.

**Aufgaben:**

1. Beschreiben Sie die Eigenschaften der Logarithmusfunktionen, indem Sie folgende Aspekte untersuchen:

- Wertebereich
- Definitionsbereich
- Monotonieverhalten
- $\log_a x$  und  $\log_{1/a} x$
- $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \dots\dots\dots$
- $\log_a (x_1 / x_2) = \dots\dots\dots$
- $\log_a (1 / x) = \dots\dots\dots$
- $\log_a x^k = \dots\dots\dots$